Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 11

1. Calcule as transformadas de Laplace e as regiões de convergência das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes:

(a) $f(t) = \operatorname{ch}(at)$ (b) $f(t) = t\operatorname{sen}(at)$

(c) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$ (d) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$, $(t > 0)$

Resolução:

(a) Atendendo a que

$$\operatorname{ch}(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

e à linearidade da Transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\operatorname{ch}(at)\}(s) &= \mathcal{L}\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\}(s) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\Big) = \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

Visto

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} s > a$$

e

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} s > -a$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} s > |a|$$

(b) Atendendo a que para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{d\,s^n}\mathcal{L}\{f\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f\}(s) \tag{1}$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}(at)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Visto

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

tem-se

$$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}(at)\}(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

(c) Atendendo a que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s-a)$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

válido para $\operatorname{Re}(s-a) > 0$, ou seja, $\operatorname{Re} s > a$.

(d) Visto não se conseguir calcular, por primitivação, o integral

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

teremos que utilizar uma das propriedades da Transformada de Laplace. Assim sendo, note-se que

$$\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}\Big\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big\}(s)\Big) = -\mathcal{L}\Big\{t\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big\}(s) = -\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

pelo que, integrando em s

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big\}(s) = -\operatorname{arctg} s + c$$

Para calcular o valor constante, consideramos a equação anterior no caso especial $s = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = c$$

É conhecido que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \pi$$

pelo que $c = \frac{\pi}{2}$ e

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big\}(s) = -\operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{2}$$

2. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de

(a) $(s^2-1)^{-2}$ (b) $6(s^4+10s^2+9)^{-1}$

(c) $\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$ (d) $\dfrac{1}{(s+1)^4}$

Resolução:

(a) Para calcular a inversa da Transformada de Laplace, vamos separar a função em fracções simples, isto é

$$\frac{1}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

Calculando as constantes, tem-se então que

$$\frac{1}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\Big)$$

É óbvio que
$$\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s) \quad \text{e} \quad \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$$
Por outro lado, visto
$$\frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\,\frac{1}{s-1} = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{e^t\}(s)$$
mais uma vez por aplicação da propriedade (1), teremos
$$\frac{1}{(s-1)^2} = \mathcal{L}\{te^t\}(s)$$
e de modo análogo se conclui que
$$\frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s)$$
Finalmente
$$\frac{1}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\Big\{ -e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}\Big\}(s)$$
pelo que
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(s^2-1)^2}\Big)(t) = \frac{1}{4}\Big(-e^t + te^t + e^{-t} + te^{-t}\Big)$$
(b) Note-se que
$$s^4 + 10s^2 + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; s^2 = -9 \;\text{ ou }\; s^2 = -1$$
pelo que
$$\frac{6}{s^4+10s^2+9} = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$
Calculando as constantes, tem-se então que
$$\frac{6}{s^4+10s^2+9} = \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\Big) = \frac{3}{4}\Big(\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - \frac{1}{3}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\}(s)\Big)$$
pelo que
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{6}{s^4+10s^2+9}\Big)(t) = \frac{3}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3t$$
(c) Mais uma vez separando em frações simples
$$\frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{5}\Big(\frac{3}{s-2} + \frac{2}{s+3}\Big) = \frac{1}{5}\Big(3\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)\Big)$$
pelo que
$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s+1}{s^2+s-6}\Big)(t) = \frac{1}{5}(3e^{2t} + 2e^{-3t})$$
(d) Note-se que
$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+1)^4} &= -\frac{1}{3}\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{(s+1)^3}\Big) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\Big(\frac{1}{(s+1)^2}\Big) \\ &= -\frac{1}{6}\,\frac{d^3}{ds^3}\Big(\frac{1}{s+1}\Big) = -\frac{1}{6}\,\frac{d^3}{ds^3}\Big(\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)\Big)\end{aligned}$$

e por aplicação de (1)

$$\frac{1}{(s+1)^4} = -\frac{1}{6}\cdot(-1)^3\mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s)$$

Então

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(s+1)^4}\Big)(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-t}$$

3. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

   b) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$, $\omega^2 \neq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   c) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ sendo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi \ \text{ e } \ t \geq 2\pi \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para a resolução dos problemas de valor inicial, iremos utilizar a propriedade

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \tag{2}$$

que tem como consequência imediata

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) - (-y(0) + sY(s)) - 6Y(s) = 0 \iff (s^2 - s - 6)Y(s) + 2 - s = 0$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = -y'(0) = 1$. Então

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6} = \frac{1}{5}\Big(\frac{4}{s+2} + \frac{1}{s-3}\Big) = \frac{1}{5}\Big(4\mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) + \mathcal{L}\{e^{3t}\}(s)\Big)$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{5}\Big(4e^{-2t} + e^{3t}\Big)$$

(b) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtém-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + \omega^2Y(s) = \frac{s}{s^2+4} \iff (s^2 + \omega^2)Y(s) - s = \frac{s}{s^2+4}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Então

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+\omega^2)} + \frac{s}{s^2+\omega^2} \equiv H_1(s) + H_2(S)$$

Não há dúvida que

$$H_2(s) = \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)$$

Relativamente a $H_1(s)$, é fundamental notar que o resultado depende do valor de ω. Se $\omega^2 \neq 4$ então, decompondo $H_1(s)$ em fracções simples:

$$H_1(s) = \frac{1}{\omega^2 - 4}\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

Assim:

$$H_1(s) = \frac{1}{\omega^2-4}\Big(\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) - \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)\Big) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega^2-4}(\cos 2t \; - \cos\omega t)\right\}(s)$$

Logo, a solução do PVI no caso $\omega^2 \neq 4$ (ou seja, $\omega \neq -2$ e $\omega \neq 2$) é:

$$y(t) = \cos\omega t + \frac{1}{\omega^2-4}(\cos 2t - \cos\omega t)$$

Se $\omega = -2$ ou $\omega = 2$, então:

$$H_1(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s^2+4}\Big) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}(s)\Big)$$

e mais uma vez por aplicação de (1), tem-se

$$H_1(s) = -\frac{1}{4}(-1)^1\mathcal{L}\{t\operatorname{sen} 2t\}(s)$$

Finalmente a solução do PVI neste caso é:

$$y(t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sen} 2t + \cos 2t$$

Neste caso ocorre ressonância.

(c) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + 2Y(s) = \frac{1}{s}(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})$$

pelo que

$$(s^2+2s+2)Y(s) - 1 = \frac{1}{s}(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Então

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+2)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2} \equiv H_1(s) + H_2(S) + H_3(s)$$

Para calcular a Transformada de Laplace inversa de $H_3(s)$ poderemos utilizar um dos dois métodos seguintes:

(i) Note-se que

$$H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} = H(s+1)$$

sendo

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s)$$

Utilizando a propriedade

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a) \tag{3}$$

podemos concluir

$$H_3(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s+1) = \mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s)$$

(ii) Atendendo a que

$$s^2+2s+2=0 \;\Leftrightarrow\; s=-1+i \text{ ou } s=-1-i$$

podemos separar em frações simples

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2+2s+2} &= \frac{A}{s-(-1+i)} + \frac{B}{s-(-1-i)} \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{s-(-1+i)} - \frac{1}{s-(-1-i)}\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\mathcal{L}\{e^{(-1+i)t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{(-1-i)t}\}(s)\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-t}(e^{it}-e^{-it})\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para calcular as inversas das Transformadas de Laplace de H_1 e H_2 podemos utilizar a propriedade:

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \tag{4}$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s^2+2s+2)} &= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\cos t\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s)
\end{aligned}$$

onde utilizámos a propriedade (3). Então:

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{H(t-\pi)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi) - e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\Big)\}(s)
\end{aligned}$$

onde utilzámos a propriedade (4). De igual modo se mostra que

$$\begin{aligned}
H_2(s) &= -e^{-2\pi s}\frac{1}{s(s^2+2s+2)} \\
&= -e^{-2\pi s}\Big(\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}\Big) \\
&= -e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s) \\
&= -\mathcal{L}\{H(t-2\pi)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\cos(t-2\pi)-e^{-(t-2\pi)}\operatorname{sen}(t-2\pi)\Big)\}(s)
\end{aligned}$$

Finalmente a solução do PVI é

$$\begin{aligned}
y(t) &= H(t-\pi)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\cos t + e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t\Big) - \\
&\quad -H(t-2\pi)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\cos t - e^{-(t-2\pi)}\operatorname{sen} t\Big) + e^{-t}\operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

4. Designa-se por δ a distribuição de Dirac com suporte na origem. Utilizando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   a) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   b) $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

   c) $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   Resolução:

   (a) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2+2s+2)Y(s) - s - 2 = e^{-\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} \quad , \quad t_0 > 0$$

Então

$$Y(s) = \frac{2+s}{s^2+2s+2} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+2s+2} \equiv H_1(s) + H_2(S)$$

Por método análogo ao utilizado na alínea (c) do problema 3:

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+2s+2} = \mathcal{L}\{e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s)$$

Utilizando a propriedade (4):

$$\begin{aligned}
H_2(S) &= e^{-\pi s}\mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{sen} t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{-H(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t\}(s)
\end{aligned}$$

Finalmente a solução do PVI é

$$y(t) = e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) - H(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen} t$$

(b) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} \quad , \quad t_0 > 0$$

Então

$$Y(s) = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} \equiv H_1(s) + H_2(S)$$

pelo que, utlizando a propriedade (4)

$$H_1(s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)\}(s)$$

e

$$H_2(s) = -e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = -\mathcal{L}\{H(t-2\pi)\operatorname{sen}(t-2\pi)\}(s)$$

Finalmente a solução do PVI é

$$y(t) = -H(t-\pi)\operatorname{sen} t - H(t-2\pi)\operatorname{sen} t$$

(c) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, utilizando (2) e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, obtem-se

$$-y'(0) - sy(0) + s^2Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\cos t\}(s)$$

o que é equivalente a

$$(s^2+1)Y(s) - 1 = -e^{-\pi s}$$

onde utilizámos o facto de $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,dt = f(t_0)$$

Então

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) - \mathcal{L}\{H(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)\}(s) \end{aligned}$$

Finalmente, a solução do PVI é

$$y(t) = \operatorname{sen} t + H(t-\pi)\operatorname{sen} t$$